富山大学
理学部
数学科

Department of Mathematics
Faculty of Science
University of Toyama

2021 年度　第 1 回談話会

【 日　時 】　2021 年 11 月 8 日（月）　16：30 〜 17：30

【 場　所 】　富山大学理学部 A 棟 4 階　A424 室

【講 演 者】　東　大樹 氏

（富山大学 大学院 理工学教育部 数学専攻 修士 2 年）

【講演題目】　Mathieu 級数に関する不等式の最良定数

【講演概要】

1890 年に，É.L.Mathieu は次の級数を導入した：

$$S(r) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+r^2)^2}, \quad r > 0.$$

この級数は後に Mathieu 級数と名付けられた．彼はこの級数に対して，$S(r) < 1/r^2$，$r > 0$ という不等式が成り立つと予想したが，証明することは出来なかった．その後，1952 年にこの不等式は証明され，現在に至るまで$S(r)$に関する多くの不等式の研究がされている．

本講演では, $r \to 0+$ のとき $S(r) \to 2\zeta(3)$ となることに着目し, 次の形の不等式を考える:

$$S(r) < \frac{2\zeta(3)}{br^2+1}, \quad r \in (0, \tfrac{1}{2}].$$

ここで，b は正の定数であり，$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$，$s > 1$ は Riemann のゼータ函数である．次が主結果である．

Theorem. $b > 0$ を定数とする．このとき，不等式

$$S(r) < \frac{2\zeta(3)}{br^2+1}, \quad r \in (0, \tfrac{1}{2}]$$

が成り立つための必要十分条件は $b \leq 2\zeta(5)/\zeta(3)$ である．

従って，b の最良定数は $2\zeta(5)/\zeta(3) = 1.72525\cdots$ である．
本講演は，藤田 安啓氏との共同研究に基づく．

※講演の内容は理解しやすく，学部学生にも興味深く聞いてもらえると思います．

＊16 時よりお茶を準備してお待ちしております。