代数学の基本定理

数の体系は自然数から始まる。自然数の中では方程式「$x+3=2$」は解を持たない。負の数が必要である。自然数に零と $-n$ （n は自然数）を加えて整数ができる。しかし，整数の中では，四則演算が自由に行えない。除法が可能であるためには，(整数)/(整数) が必要である。このような数を加えて，有理数体まで拡張される。ところが，有理数でない実数（無理数）が紀元前５世紀頃ピタゴラス学派によって発見された。その後，有理数と無理数を合わせた数の体系（実数体）が認識されていった。ただし，実数についての厳密な議論は１９世紀後半まで待たなければならなかった。しかし，ここまで数体系を拡張しても，まだ解を持たない代数方程式が存在する。「$x^2=-1$」は実数の範囲で解を持たない。そこで，実数の単位 1 とは独立な，いわゆる虚数単位 i を導入し，$i^2=-1$ と定義した。そして，a, b を実数とし，$a+bi$ と表す数を複素数と呼んだ。実数 a と複素数 $a+0i$ を同一視することにより，実数の集合は複素数の集合 $\mathbb{C}$ の部分集合とみなすことができる。複素数体まで拡張すれば，解の公式からすぐわかるように，すべての２次式は複素数体で一次式の積に分解する。それでは，一般の n 次多項式についてはどうであろうか。その答えが代数学の基本定理である。

定理（代数学の基本定理）$a_0, a_1, \ldots, a_n$ を定数（複素数でよい）とし，次の多項式を考える。

$$P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$$

ただし，$n \geqq 1$，$a_n \neq 0$ とする。このとき，代数方程式 $P(X)=0$ は複素数の範囲に必ず解を持つ。

この定理により，数体系をこれ以上拡張する必要はなくなった（複素数体は代数的閉体である)。代数学の基本定理には多くの証明が知られている。大学で複素解析学を学んだ際に，最大値原理，開写像定理あるいは Liouville の定理を用いた証明を学ぶのが一般的である。ここでは，次の二つの初等的な事実を用いた証明を紹介する。

(i) 平面内の有界閉集合上の実数値連続関数は最小値を持つ。

(ii) すべての複素数は k 乗根を持つ。

(i) は解析学の基礎である「実数の完備性」による。(ii) は複素数の極形式による表示から容易に示すことができる。これから述べる証明は Argan によるものである。　定理の証明のために次の補題を準備する。

補題　k を自然数，$g(z)$ を $g(0)=0$ をみたす多項式とし，

$$h(z)=1+bz^k+z^kg(z), \quad b \neq 0$$

とおく。このとき，$|h(u)|<1$ をみたす複素数 u が存在する。

[証明]　(ii) より，$-\dfrac{1}{b}$ の k 乗根 d が存在する。$0 < t \leqq 1$ に対して

$$\begin{aligned} |h(dt)| &= \left|1 + bd^k t^k + d^k t^k g(dt)\right| \\ &\leqq 1 - t^k + t^k \left|d^k g(dt)\right| \end{aligned}$$

である。g は連続で $g(0) = 0$ であることにより，十分小さな $0 < t < 1$ をとれば，$\left|d^k g(dt)\right| < \dfrac{1}{2}$ をみたす。このとき，

$$|h(dt)| \leqq 1 - t^k + \frac{1}{2}t^k < 1$$

である。 □

定理の証明　$f(z) = P(z)$ とおく。$z \neq 0$ に対し

$$|f(z)| = |z|^n \left|a_n + h\left(\frac{1}{z}\right)\right|$$

である。ここで

$$h(w) = a_{n-1}w + \cdots + a_0 w^n$$

とおいた。$h(w)$ は $h(0) = 0$ である連続関数なので，$\delta > 0$ を $|w| < \delta$ ならば $|h(w)| \leqq \dfrac{|a_n|}{2}$ となるようにとれる。さらに，$r > \dfrac{1}{\delta}$ を $|a_n| r^n > 2|a_0|$ をみたすようにとる。すると，$|z| > r$ のとき

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geqq |z|^n \left(|a_n| - \left|h\left(\frac{1}{z}\right)\right|\right) \\ &\geqq |z|^n \frac{|a_n|}{2} \\ &> r^n \frac{|a_n|}{2} \\ &> |a_0| = |f(0)| \end{aligned}$$

である。(i) より $|f(z)|$ は $K = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqq r\}$ 上で最小値 $|f(c)|$ $(c \in K)$ をとる。$0 \in K$ なので $|f(0)| \geqq |f(c)|$ である。また，上に述べたことにより，$|z| > r$ ならば $|f(z)| > |f(0)| \geqq |f(c)|$ であるので，$|f(c)|$ は $\mathbb{C}$ 上での $|f(z)|$ の最小値である。

このとき，$f(c) = 0$ を示せばよい。$f(c) \neq 0$ と仮定する。$h(z) = \dfrac{1}{f(c)}f(c+z)$ とおけば

$$h(z) = 1 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \cdots b_n z^n, \quad b_k \neq 0$$

と表せる。$g(z) = b_{k+1}z + \cdots + b_n z^{n-k}$ とおくと

$$h(z) = 1 + b_k z^k + z^k g(z)$$

である。$g(0) = 0$ であるので，補題により $|h(u)| < 1$ となる $u \in \mathbb{C}$ が存在する。$c' = c + u$ とおけば，

$$|f(c')| = |h(u)||f(c)| < |f(c)|$$

となり，$|f(c)|$ が最小値であることに矛盾する。したがって，$f(c) = 0$ でなければならない。 □

（理学部数学科：阿部幸隆）