循環小数の一性質 —— Midy の定理とその一般化 ——

有理数 1/7 は, 10 進法では, 次のように**循環小数**で表されます:

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\ldots.$$

この右辺で周期的に繰り返して現れる 142857 の形の数の列を**循環節**と呼びますが, この循環節を 142, 857 あるいは 14, 28, 57 のように分割して加えると次のようになります:

$$142 + 857 = 999, \tag{1}$$

$$14 + 28 + 57 = 99. \tag{2}$$

つまり, 数字の列 142857 を同数ずつそれぞれ 2 個 142, 857 及び 3 個 14, 28, 57 に分割し, 加えたものが 9 をいくつか並べた数になります. ここで, 足し算は, 上記の数の列を 10 進法で表示された自然数と見なして行っています.

1/7 以外の, いくつかの有理数の小数展開についても調べてみます. 尚, 以下では, 循環節を bar $\overline{}$ を用いて,

$$0.142857142857142857\cdots = 0.\overline{142857}$$

のように表すことにします.

$$\frac{1}{77} = \frac{1}{7\times 11} = 0.\overline{012987} \quad \Rightarrow \quad 012 + 987 = 999 \text{ (二つに分割)}.$$

$$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923} \quad \Rightarrow \quad 076 + 923 = 999 \text{ (二つに分割)},$$

$$07 + 69 + 23 = 99 \text{ (三つに分割)}.$$

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647} \quad \Rightarrow \quad 05882352 + 94117647 = 99999999 \text{ (二つに分割)}.$$

これらの性質は, もっと一般の有理数の小数表示について成り立つ性質です. $1/p$ (p は素数) が, (1) の形の性質をもつこと, 即ち,

$$\frac{1}{p} = 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}$$

のように循環節の長さが**偶数**のとき, 循環節 $a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}$ を

$$a_1 a_2 \ldots a_k, \quad a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}$$

と二つに分割するならば,

$$a_1 + a_{k+1} = 9, \quad a_2 + a_{k+2} = 9, \quad \ldots, \quad a_k + a_{2k} = 9 \tag{3}$$

であることは, 古くから知られている結果で, **Midy の定理** (Midy 1836) と呼ばれます. しかし, (2) の形の性質 (長さが 3 **の倍数** である循環節を 3 **個に分割する** 場合, あるいは, もっと一般に, 長さが $d \geq 2$ **の倍数** である循環節を d **個に分割する** 場合) が, ある程度一般の有理数に対して成り立つことが示されたのは, 比較的最近で, 2004 年の Ginsberg の論文 (Ginsberg 2004) の発表以降です. ここでは, このような循環小数の性質を, 主に, Lewittes 2007 に従って紹介します.

下記の Lewittes の定理は, 10 進小数表示には限らず, 任意の g 進小数表示 (g は 2 以上の整数) に対して定式化されますが, ここでは 10 進小数表示の場合についてだけ述べます.

N を 10 と互いに素な任意の自然数 (素数とは限らない) とし, 固定して考えます. 条件

$$x \text{ と } N \text{ が互いに素}, \ \ 1 \leq x < N \tag{$*$}$$

を満たす自然数 x に対し, 有理数 x/N の 10 進小数表示

$$\frac{x}{N} = 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \tag{$**$}$$

を循環節 $a_1 a_2 \ldots a_n$ の長さ n が最小になるように取ります. 循環節 $a_1 a_2 \ldots a_n$ は x に応じて変化しますが, これの最小の長さ n (**周期** と呼ぶ) は, x の取り方には依らず, N だけで定まります. また, N が 10 と互いに素と仮定したことにより, 上のように, 小数第一位から循環が始まります. そうでないときには, 循環の始まる位置が小数第二位以降になります. 例えば, $4/33 = 0.121212\ldots$ の循環節を用いた表示は,

$$\frac{4}{33} = 0.12|12|12|\cdots = 0.\overline{12}, \quad \frac{4}{33} = 0.1|2121|2121|\cdots = 0.1\overline{2121}, \ldots$$

のように二通り以上ありますが, ($**$) のように, 小数第一位から循環が始まり, 長さが最小となる循環節は一意的に定まります. また, 分母が 10 と互いに素でない (2 を約数としてもつ) 分数 $1/6 = 0.1666\cdots = 0.1\overline{6}$ は小数第二位から循環が始まります.

周期 n が, x には関係せず, N だけで定まることにより, 次の定義が意味を持ちます.

定義: $d \geq 2$ が n の約数で, $k = n/d$ (従って, $n = dk$) とする. 次の条件が成り立つとき, N が **d-Midy の性質をもつ** という: ($*$) を満たす任意の x に対して, ($**$) の循環節を

$$a_1 a_2 \ldots a_n = \overbrace{\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_k}_{k\text{ 個}} \,|\, \underbrace{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}_{k\text{ 個}} \,|\, \ldots \,|\, \underbrace{a_{(d-1)k+1} a_{(d-1)k+2} \ldots a_{dk}}_{k\text{ 個}}}^{d\text{ 個}}$$

のように d 個に分割して表すとき,

$$(d\text{-}M) \qquad a_1 a_2 \ldots a_k + a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k} + \cdots + a_{(d-1)k+1} a_{(d-1)k+2} \ldots a_{dk} \equiv 0 \pmod{10^k - 1}.$$

ここで, 左辺は $a_1 a_2 \ldots a_k, \ \ldots$ の形の 10 進法表示をもつ整数 $a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_k, \ \ldots$ の和を意味し, "$\equiv 0 \pmod{10^k - 1}$" は,

$$[\text{左辺} \div (10^k - 1) \text{ の余り}] = 0,$$

即ち, 左辺が $10^k - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{k\text{ 個}}$ **の倍数** であることを意味します.

今後, 簡単のため, ($**$) の $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し, 次の記号 $A, A_1, A_2, \ldots, A_d$ を用いることにします:

$$A := a_1 a_2 \ldots a_n = a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{2k} \ldots a_{(d-1)k+1} \ldots a_{dk},$$
$$A_1 := a_1 a_2 \ldots a_k, \quad A_2 := a_{k+1} \ldots a_{2k}, \ \ \ldots, \ \ A_d := a_{(d-1)k+1} \ldots a_{dk}.$$

そのとき, $(d\text{-}M) \iff$

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_d \equiv 0 \pmod{10^k - 1}. \tag{4}$$

Lewittes の定理 (Lewittes 2007): (I) 上記の記号 $N, n, d, k, \ldots$ の下で, 次の 3 条件は同値である:
(i) N は d-Midy の性質をもつ.
(ii) $x = 1$ に対する循環節に対して $(d\text{-}M)$ が成り立つ.
(iii) $\dfrac{10^n - 1}{10^k - 1} = \dfrac{10^{dk} - 1}{10^k - 1} = 10^{(d-1)k} + 10^{(d-2)k} + \cdots + 10^k + 1 \equiv 0 \pmod{N}$.
(II) N と $10^k - 1$ が互いに素のとき (例えば, N が 7 以上の素数のとき), N は d-Midy の性質をもつ.

この Lewittes の定理の (II) は, 以下の Midy の定理と Ginsberg の定理の一般化と考えられます. 実際, N を 7 以上の素数とするとき, $d = 2$ と $d = 3$ の場合がそれぞれ Midy の定理と Ginsberg の定理に相当します. 但し, Lewittes の定理からいえるのは, $(d\text{-}M)$ の左辺が $\underbrace{99\cdots9}_{k\text{ 個}}$ で割り切れることだけであり, それが丁度 $\underbrace{99\cdots9}_{k\text{ 個}}$ であることまではいえません.

Midy の定理 (Midy 1836). x を自然数, p を 7 以上の素数, $1 \leq x < p$ とする. 有理数 x/p の 10 進小数展開の周期が偶数, 即ち, $x/p = 0.\overline{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}$ のとき,

$$a_1 a_2 \cdots a_k + a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k} = \underbrace{99\cdots9}_{k\text{ 個}}.$$

Ginsberg の定理 (Ginsberg 2004). p が素数, 周期が 3 の倍数 $3k$, 即ち, $1/p = 0.\overline{a_1 a_2 \cdots a_{3k}}$ のとき,

$$a_1 a_2 \cdots a_k + a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k} + a_{2k+1} a_{2k+2} \cdots a_{3k} = \underbrace{99\cdots9}_{k\text{ 個}}.$$

Lewittes の定理の証明: (I) 上記の記号 $x/N = 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$, A, A_1, A_2, $\ldots$, A_d を用いると,

$$\frac{x}{N} = 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 a_2 \ldots a_n \times 0.\underbrace{\overline{00\ldots01}}_{n} = \frac{A}{10^n - 1}, \tag{5}$$

$$A \equiv A_1 + A_2 + \cdots + A_d \pmod{10^k - 1}. \tag{6}$$

実際, 割り算 $\frac{1}{10^n - 1} = 1 \div \underbrace{99\ldots9}_{n} = 0.\underbrace{\overline{00\ldots01}}_{n}$ より, (5) が従う. また,

$$\begin{aligned} A &= (a_1 \ldots a_k) \cdot 10^{(d-1)k} + (a_{k+1} \ldots a_{2k}) \cdot 10^{(d-2)k} + \cdots + a_{(d-1)+1} \ldots a_{dk} \\ &= 10^{(d-1)k} A_1 + 10^{(d-2)k} A_2 + \cdots + A_d \end{aligned}$$

であり, $10^k \equiv 1 \pmod{10^k - 1}$ より, $10^{(d-1)k} \equiv 1^{d-1} = 1 \pmod{10^k - 1}$, $10^{(d-1)k} A_1 \equiv A_1$, $10^{(d-2)k} A_2 \equiv A_2, \ldots \pmod{10^k - 1}$ がいえるから, (6) が従う.

(5) 及び x と N が互いに素であることに注意すると, ある自然数 D が存在して,

$$A = xD, \quad 10^n - 1 = ND. \tag{7}$$

(6) と (7) より, ある x に対して (4) が成立 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} A \equiv 0 \pmod{10^k - 1} &\iff \frac{10^n-1}{10^k-1}A \equiv 0 \pmod{10^n - 1} \\ \iff \frac{10^n-1}{10^k-1}xD \equiv 0 \pmod{ND} &\iff \frac{10^n-1}{10^k-1}x \equiv 0 \pmod{N} \\ \iff \frac{10^n-1}{10^k-1} \equiv 0 \pmod{N}. & \end{aligned}$$

この同値性の変形では, 合同式 "$\equiv$" の性質と, 最後に x と N が互いに素であることを用いた. 最後の合同式が x には関係しないことに注意すれば, (I) の (i), (ii), (iii) の同値性が従う.

(II) $1/N$ を (5) のように表すと, (7) より, $10^n - 1 \equiv 0 \pmod{N}$. 従って,

$$(10^k - 1) \cdot \frac{10^n-1}{10^k-1} = 10^n - 1 \equiv 0 \pmod{N}.$$

N と $10^k - 1$ が互いに素だから, $\dfrac{10^n-1}{10^k-1} \equiv 0 \pmod{N}$ となり, (I) の条件が満たされる.

Midy の定理の証明:

$$A := a_1a_2\cdots a_{2k}, \quad A_1 := a_1a_2\cdots a_k, \quad A_2 := a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{2k}$$

とおくと, これまでと同様に,

$$A = 10^kA_1 + A_2, \quad \frac{x}{p} = \frac{A}{10^{2k}-1}$$

より,

$$\begin{aligned} &(10^{2k} - 1)x = Ap = (10^k - 1)A_1p + (A_1 + A_2)p, \\ &(A_1 + A_2)p = (10^k - 1)\{(10^k + 1)x - A_1p\}. \end{aligned} \tag{8}$$

周期が $2k$ だから, $10^k \not\equiv 1 \pmod{p}$ ($\because$ $10^k \equiv 1 \pmod{p}$ ならば, $10^k - 1 = dp$, $x/p = xp/dp = xp/(10^k - 1) = 0.\overline{b_1b_2\dots b_k}$ と表せ, 周期が k 以下になる). 更に, p が素数だから, p と $10^k - 1$ は互いに素. 従って, (8) より, $A_1 + A_2$ は $10^k - 1$ の倍数. 一方, $A_1 = a_1a_2\dots a_k \leq 99\dots9 = 10^k - 1$, 同様に, $A_2 \leq 10^k - 1$ だから, $A_1 + A_2 \leq 2(10^k - 1)$. $A_1 + A_2 = 2(10^k - 1)$ とすると, $A_1 = 99\dots9$, $A_2 = 99\dots9$ だから, $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k} = 9$, 従って, $x/p = 0.\overline{a_1a_2\dots a_{2k}} = 0.\overline{99\dots9} = 1$, $x = p$ となり, 矛盾. 以上から, $A_1 + A_2 = 10^k - 1 = 99\dots9$.

Midy が, 循環節の二等分に関する上記の結果を発見してから, 二等分以外 (三等分) に関する Ginsberg の結果が, 初めて発表されるまでに, 160 年以上かかっています. Midy 自身も二等分以外の場合を考えていたようですが, 定式化がうまくいかず, 綺麗な規則性が見出せなかったようです. 本来の Midy の定理の主張は, (3) の形 $a_1 + a_{k+1} = 9$, $a_2 + a_{k+2} = 9$, $\dots$ であり, (1), (2), (d-M) の形 (分割された列 $a_1\dots a_k$, $a_{k+1}\dots a_{2k}$, $\dots$ をそのまま 10 進数と見なして加える: $a_1\dots a_k + a_{k+1}\dots a_{2k} + \dots$) ではありませんでした. $a_1\dots a_k$, $a_{k+1}\dots a_{2k}$ を 10 進数と見なし, (3) の $a_1 + a_{k+1} = 9$, $a_2 + a_{k+2} = 9$, $\dots$ を (2) の $a_1\dots a_k + a_{k+1}\dots a_{2k} = 99\dots9$ と解釈し直したことが, Ginsberg, Lewittes, 等の発見につながったように思われます.

これまで, 特殊な有理数を小数展開したときの循環節については, (d-M) のような規則性があることを見てきました. しかし, 一般の有理数については, どんな規則性も期待できません. 実際, 有理数は, その小数部分が循環小数 $0.b_1b_2\ldots b_m\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ となる実数として特徴付けられます (b_1, b_2, ..., b_m が現れるのは, 有理数の分母が 2 または 5 を約数にもつときのみ). そして, 任意の有限列 $a_1a_2\ldots a_n$ (a_1, $a_2\ldots$ は, 0, 1, ..., 9 のいずれか) が, この循環節となり得ます.

最後に, $d = 2$, 3 以外で (d-M) を満たす有理数, (d-M) を満たさない有理数の具体例をいくつか挙げます.

(1) $1/17 = 0.\overline{0588235294117647}$: 周期 $n = 16$. 17 が素数だから, Lewittes の定理より, 16 の全ての約数 $d \geq 2$ に対して, (d-M) が成立する. 実際,

$d = 4$ のとき,

$$0588 + 2352 + 9411 + 7647 = 19998 = 9999 \times 2.$$

$d = 8$ のとき,

$$05 + 88 + 23 + 52 + 94 + 11 + 76 + 47 = 396 = 99 \times 4.$$

$d = 16$ のとき,

$$0 + 5 + 8 + 8 + 2 + 3 + 5 + 2 + 9 + 4 + 1 + 1 + 7 + 6 + 4 + 7 = 9 \times 8.$$

(2) $1/29 = 0.\overline{0344827586206896551724137931}$: 周期 $n = 28$. 29 が素数だから, Lewittes の定理より, 28 の全ての約数 $d \geq 2$ に対して, (d-M) が成立する. 例えば,

$d = 4$ のとき,

$$0344827 + 5862068 + 9655172 + 4137931 = 19999998 = 9999999 \times 2.$$

$d = 7$ のとき,

$$0344 + 8275 + 8620 + 6896 + 5517 + 2413 + 7931 = 39996 = 9999 \times 4.$$

(3) $1/121 = 1/(11 \times 11) = 0.\overline{0082644628099173553719}$: 周期 $n = 22$. 22 の約数 $d \geq 2$ は, $d = 2$, 11, 22 のいずれか. 121 は合成数であり, d の値によって, (d-M) が成立する場合と成立しない場合がある.

$d = 2$ のとき,

$$00826446280 + 99173553719 = 99999999999.$$

$d = 11$ のとき,

$$00 + 82 + 64 + 46 + 28 + 09 + 91 + 73 + 55 + 37 + 19 = 504 \neq 99 \times (\text{整数}).$$

$d = 22$ のとき,

$$\begin{aligned}&0 + 0 + 8 + 2 + 6 + 4 + 4 + 6 + 2 + 8 + 0 + 9 + 9 + 1 + 7 + 3 + 5 + 5 + 3 + 7 + 1 + 9\\&= 99 = 9 \times 11.\end{aligned}$$

(4) 1/2011 の周期 $n = 670 = 10 \times 67$. 2011 が素数だから, $(d\text{-}M)$ は常に成り立つ. 実際, $d = 10$, $k = 67$ のときに確かめてみると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2011} = 0.&\overline{0004972650422675285927399303828940825459970164097463948284435604177}\\
&\overline{0263550472401790154152163102933863749378418697165558925907508702138 2}\\
&\overline{3968175037294878170064644455494778717056190949776230730979612133267}\\
&\overline{0313276976628543013426156141223272003978120338140228741919443063152}\\
&\overline{6603679761312779711586275484833416210840377921432123321730482347090}\\
&\overline{9995027349577324714072600696171059174540029835902536051715564395822}\\
&\overline{9736449527598209845847836897066136250621581302834410740924912978617}\\
&\overline{6031824962705121829935355544505221282943809050223769269020387866732}\\
&\overline{9686723023371456986573843858776727996021879661859771258080556936847}\\
&\overline{3396320238687220288413724515166583789159622078567876678269517652909},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad\ 0004972650422675285927399303828940825459970164097463948284435604177\\
&+0263550472401790154152163102933863749378418697165558925907508702138 2\\
&+3968175037294878170064644455494778717056190949776230730979612133267\\
&+0313276976628543013426156141223272003978120338140228741919443063152\\
&+6603679761312779711586275484833416210840377921432123321730482347090\\
&+9995027349577324714072600696171059174540029835902536051715564395822\\
&+9736449527598209845847836897066136250621581302834410740924912978617\\
&+6031824962705121829935355544505221282943809050223769269020387866732\\
&+9686723023371456986573843858776727996021879661859771258080556936847\\
&+3396320238687220288413724515166583789159622078567876678269517652909\\
&= 49999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999995\\
&= 5(10^{67} - 1) \equiv 0 \pmod{10^{67} - 1}.
\end{aligned}
$$

参考文献

B. D. Ginsberg 2004, Midy's (Nearly) Secret Theorem — An Extension After 165 Years, College Mathematics Journal, 35 (2004), 26-30.

J. Lewittes 2007, Midy's theorem for periodic decimals, Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 7 (2007), ♯A02, pp.11.

E. Midy 1836, De Quelques Propriétés des Nombres et des Fractions Décimales Périodiques, Nantes, 1836.

(数学科 濱名 正道)