確率論における同程度の確からしさ

確率の定義

何らかの実験もしくは観測（試行）を行ったときの起こりうる場合（根元事象という）が N 種類であるとする（サイコロを投げるとき起こりうる場合は 6 種類で、$N=6$ である）。また、確率を調べたい事柄（事象という）が k 種類の場合（根元事象）からなるとしよう。偶数の目の出る事象は 3 種類の場合（根元事象 $\{2\},\{4\},\{6\}$）からなり、$k=3$ である。

古典確率論（初等確率論、組み合わせ論的確率論）において、確率は概ね次の 2 通りに解釈される。

１．ラプラスによる確率の定義（同程度の確からしらを用いた定義）
全ての起こりうる結果（N 種類）が同程度の確からしさで起こるならば

$$\begin{aligned} \text{その事象の確率} \quad &= \quad \frac{\text{（事象を構成する根元事象の数 } k\text{）}}{\text{（起こりうる全ての結果の種類 } N\text{）}} = \frac{k}{N} \\ \text{根元事象の確率} \quad &= \quad \frac{1}{N} \end{aligned}$$

である。

２．統計的（経験的）確率の定義
一定条件の下で実験を繰り返し行う。実験回数 n が大きくなれば、調べたいこと（事象）の起こる回数 m の比率（頻度）も安定してくる。この値を事象の起こる統計的確率という。

注意 この 2 つの定義が同等であることは大数の法則から分かります。

確率論の起こり

この確率の考え方はカードとサイコロを用いた賭博が流行していた 15 世紀から 16 世紀に遡る。賭博の問題が知識階級の間でも話題にされ、確率計算に興味を持つ数学者もいた。賭博の勝ち方計算も要求され、賭博のチャンスについての本も書かれていた。

このような中で確率計算の機は熟していった。ジェロラモ・カルダノ（1501 年〜1576 年）は「偶然のゲームに関する本」の中で確率計算を扱っているし、ガリレオ・ガリレイ（1564 年〜1642 年）も確率計算について述べている。

ポアソンは「賭け事に関する一つの問題が、一人の俗人から厳格なヤンセン教徒に提出されたが、それが確率論の起源であった」と述べている。当時有名な賭博師シュヴァリエ・ド・メレ（俗人）はパリの数学者たちに次の分配問題を尋ねていた。

分配問題 1 :「1 個のサイコロを 8 回投げて、そのうち１回 6 の目が出る」ことに賭けたゲームで、3 回投げて 6 の目が出なくて、4 回目を投げる前にやむなくゲームを中止した。どのような割合で賭け金を分配したらよいか

この質問を受けたブレーズ・パスカル（ヤンセン教徒）（1623 年〜1662 年）はピエール・ド・フェルマー（1601 年〜1665 年）との書簡のやりとりの中で、この問題を扱っている。この書簡のやりとりから確率論が始まったとされています。この中では、サイコロ遊びの分け前と賭け勝負の分け前が議論されていますが、サイコロ遊びの分け前においては「同程度の確からしさ」と「期待値」の考え方が現れている。また別の書簡では次の分配問題も扱われている。

分配問題 2：最初に 3 勝すれば勝ちとなるゲームをやむなく途中で中断した場合、賭け金の総額をどう分配すればよいか（2 人の技量は同等とする）。

ここではより簡単な、ガリレイが貴族から受けた次の質問を考えてみよう。

ガリレイが受けた質問：
３つのサイコロを投げるとき、目の和が 9 になる場合と 10 になる場合とはどちらが起こりやすいか。

貴族は和が 9 になる場合は

$$(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(2,3,4),(3,3,3)$$

の 7 通り、和が 10 になる場合も

$$(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4),(3,3,4)$$

の 7 通りであるから、どちらに賭けても同じであると考えたが、経験上 10 の方が有利なようだ。なぜだろう？（この実験を数多く繰り返せば、２の統計的確率に到達する。）実は上の事象では「同程度の確からしさ」は成立していない。

ガリレイは $(1,2,6)$ を $(1,2,6),(1,6,2),(2,1,6),(6,1,2),(6,2,1)$ の場合に分割して（順列を）考えた。、他の各場合も順列に分割した場合の数だけあり、これらが同程度に確からしいとし、次のように答えた。

和が 9 になる場合は

$$(1,2,6)\,\text{は}\,3!=6\,\text{通り},(1,3,5)\,\text{は}\,6\,\text{通り},(1,4,4)\,\text{は}\,\frac{3!}{2!}=3\,\text{通り},(2,2,5)\,\text{は}\,3\,\text{通り},(2,3,4)\,\text{は}\,6\,\text{通り},(3,3,3)\,\text{は}\,1\,\text{通り}$$

合計すると、$6+6+3+3+6+1=25$ 通り、和が 10 になる場合は

$$(1,3,6)\,\text{は}\,3!=6\,\text{通り},(1,4,5)\,\text{は}\,6\,\text{通り},(2,2,6)\,\text{は}\,\frac{3!}{2!}=3\,\text{通り},(2,3,5)\,\text{は}\,6\,\text{通り},(2,4,4)\,\text{は}\,3\,\text{通り},(3,3,4)\,\text{は}\,3\,\text{通り}$$

合計すると、$6+6+3+6+3+3=27$ 通りで、確率の比は $25:27$、確率は

$$\text{和が 9 になる確率}=\frac{25}{6^3}=\frac{25}{216},\quad \text{和が 10 になる確率}=\frac{27}{6^3}=\frac{27}{216}$$

となり、和が 10 になる方が確率 $\frac{2}{216}\fallingdotseq 0.009259$ だけ起こりやすい。

勘違いしやすい確率の例を考えてみよう。

問題 1：両面とも赤、両面とも白、片面白で他面が赤のカードが 3 枚ある。この中から 1 枚取り出したカードの上面が赤であった。下面が白か赤か（これは「ライアーゲーム」にも出ていました）

半々ではない

問題 2：50 人の出席者の中で誕生日が同じ人がいたとするとそれは珍しいことだろうか

問題 3：3 本の中に 1 本あたりがあるあみだくじがある。1 本を選択し、当たりかどうか調べる前に、他の 2 本の中の外れくじ 1 本を知らされた。選択を変えるべきだろうか。

問題 1 の解：上面が赤の場合は次の 2 つの場合がある。（上面、下面）＝（赤、赤)、（赤、白）これらが同程度確からしいとしてはいけない。カードの 2 面に A 面、B 面と名前をつけると、3 枚のカードは（A 面赤、B 面赤)、（A 面白、B 面白)、（A 面赤、B 面白）のように書ける。上面が赤の場合は厳密には次の 3 つの場合がある。（上面、下面）＝（A 面赤、B 面赤）（B 面赤、A 面赤)、（A 面赤、B 面白）これらは「同程度確からしい」ので下面が赤になる場合は 2 通り、白になる場合は 1 通りで、

$$\text{下面が赤の確率} = \frac{2}{3}, \qquad \text{下面が白の確率} = \frac{1}{3}$$

となる。

問題 2 の解：出席者の人数を n 人とする。

$$P_n = \text{誕生日が同じ人の組が 1 組以上いる確率} = 1 - \text{全員の誕生日が異なる確率}$$

であり、全員の誕生日が異なる確率は $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{366-n}{365}$ であるから、

$$p_n = \text{誕生日が同じ人の組が 1 組以上いる確率} = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{366-n}{365}$$

これを計算してみると、

n	10	15	20	25	30	40	50	70	90	100
p_n	0.116948	0.252901	0.411438	0.5687	0.706316	0.940976	0.970374	0.99916	0.999994	0.99999969

となる。25 人いれば 50 %を越え、50 人なら 97 %の確率で同じ誕生日の人の組があることになる。

問題 3 の解：
選択したくじがあたりの場合：変更すれば必ず外れだから、当たりくじを引く確率は P_1 は

$$P_1 = \text{当たるくじを引いた確率} \times \text{変更しないで当たる確率} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

選択したくじがはずれ場合：変更しなければ必ず外れだから、当たりくじを引く確率 P_2 は

$$P_2 = \text{最初に外れを引く確率} \times \text{変更して当たる確率} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

となるので、選択を変えるべきである。